在继续介绍基本流体求解器的核心之前,压强投影步骤使得流体不可压缩并满足其边界条件,我们需要转移到几何形状上.在上一章中,我们已经遇到了边界条件和相关的几何问题:

* 当粒子在固体内部时?(该点可能是我们在半拉格朗日期间回溯到的位置)
* 某些几何图体表面上最近的点是什么？
* 我们如何将一个区域的值外推到另一个区域?

前两个查询在流体求解器中极为常见.我们通常也希望几何图形的表示与网格上离散的方程配合使用,最实际的答案之一是水平集方法.

在本书中,我们将仅介绍所需的基础知识.读者可以参考Osher和Fedkiw的书[OF02],以更详细地研究水平集的数字和应用.

上面的第一个查询表明正确的方法是隐式曲面.虽然有很多方法可以将其概括,但我们将集中在连续的标量函数定义的几何体:

* 当时点在几何体之外,
* 当时点在几何体内部,且
* 当时点在几何体表面上.

在计算机图形学中的某些其他上下文中,约定可以颠倒(“外部”是负区域),也可以使用非零的阈值,但这通常是我们在流体模拟中采用的方法.

该表面也可以称为的零等值线，“等值线”是指等高线处的值均相同（“ iso”），而“零”表示该特殊值的轮廓。 在微积分（在一定水平上的点集）中也使用了“水平集”一词，但是在数值方法和计算机图形学中，它意味着更多.

如果在曲面某个点上是可微分的，向量微积分还告诉我们，梯度矢必须指向曲面的法向量.由于在内部为负,而外部则增加为正,因此,实际上梯度必须是曲面上朝外的法向量.(参考教材第十四章第六节内容”Tangent Planes to Level Surfaces”.)

如果我们要问梯度恰好是表面上的单位长度法线呢?换句话说,要求

至少在曲面附近? 由于梯度必须平行于法线，这将意味着的方向导数在法线方向上恰好为1,

这意味着对于一个小数值和表面上的点，

在这种情况下,是我们估计在朝外方向时距离表面的距离,并且这告诉我们值必须近似其本身距离.更精确的说,我们在寻找**符号距离[signed distance]**,当处于几何体内部时,值为负;这是外向距离,向内时该值为负.

实际上,我们可以解决这个问题:给定任意几何表示,将定义为有符号距离函数,有时缩写为SDF.然后,所得的将用作出色的隐式表面描述.

4.1 符号距离

给定任何封闭的点集,该点集的**距离函数[distance function]**为

也就是说,它是到中最近点的距离.如果将空间分为明确定义的内部和外部,则符号距离函数为

除梯度等于曲面上单位长度的向外法线外,符号距离还具有许多有用的属性.例如,在几何图形外的点处,令为曲面上距离的点.显然，如果我们直接远离曲面上最近的点，距离函数将增长最快,向量积分告诉我们,梯度必须指向“最陡的上升”方向.换句话说，在几何图形之外,始终指向曲面上最近的点.类似的推理表明,在几何图形内部，指向曲面上最近的点.

设是指向最近点的方向:

显然如果我们沿着该方向移动小距离到,距离最近的点依然是:曲面上的最近点不会因你移动而改变!因此距离函数在新点处必须等于.这给出了方向导数:

我们已经知道,几何体外部的梯度指向与相反的方向,方向导数只是梯度与方向的点积,,因此我们可以算出渐变在几何图形外部仅仅是-.类似的推理应用在几何内部.综上所述:

* 在几何体外部,是指向曲面最近点的单位向量,
* 在几何体内部,是指向曲面最近点的单位向量,
* 在几何体曲面上,是指向曲面法向量的单位向量.

如果我们结合值是离最近点的距离(在内部时为负值)这一事实,我们得到另一个有用的结果,对任意点,

是曲面上距离的最近点.符号距离函数很容易为我们提供本章开头列出的前两个查询的答案！

另一个优美的结果是是距离曲面最近点向外指向曲面法向量的单位向量.换句话说,它使我们将“法线”概念合理地扩展到了甚至不在表面上的点.例如,对于靠近但不完全在固体表面上的流体流动,我们使用,可以轻松地将速度分解为与表面垂直的分量,和与表面相切的余数.

深入研究水平集的数学方面，可以将梯度始终为单位长度这一事实表示为称为Eikonal方程的非线性PDE：

事实证明，有了适当的边界条件（即几何表面上的）和问题中信息流的技术条件，这也足以定义符号距离。一些论文和算法都从这个角度进行工作，但是本书中我们将大部分坚持几何推理。

可以证明，实际上除**中轴[medial axis]**以外,符号距离所有地方都是平滑的(即存在和更高的导数),所有距离值是由与表面的不同部分等距的点组成.中轴恰好是没有唯一最近点的地方，例如球体的中心和平板内部的中间平面.它伸展以接触尖锐几何形状的边缘和角落.在凹形几何体周围,中轴的某些部分在几何体之外.

对于典型的曲面，中间轴是一个较小的低维集，我们通常不必担心–即使在中间轴上，仍然是连续的，只是有一个纽结。 特别是在表面本身光滑的情况下，在表面上和表面附近的符号距离是光滑的。 但是，请务必记住，以上有关梯度的所有讨论都在中间轴处分解：该函数甚至在此处均不可微分，因此梯度不存在。 我们将很快讨论的梯度的数值近似值通常仍会给出一个矢量，但它可能比单位长度小得多，甚至可能为零。

符号距离函数的高阶导数在平滑的地方也具有几何意义.例如.以原点为中心的半径为r的球面的符号距离函数为

梯度为

对该函数取散度,即三维空间中原符号距离函数的拉普拉斯算子,

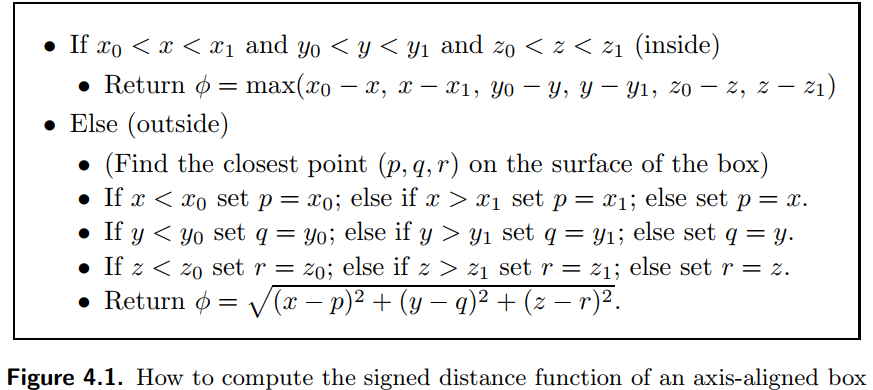
特别是,在的曲面上,拉普拉斯恰好等于球的平均曲率.这绝非偶然：对于任何光滑的曲面一般都成立,在曲面上求出的符号距离函数的拉普拉斯算术是平均曲率.

4.2 离散化符号距离函数

到目前为止,我们已经定义了精确的符号距离函数.对于一些几何对象，这很容易得出解析解.以为中心的半径r的球面的符号距离为

通过点且法线为的无穷平面的符号距离为

定义为[x0，x1]×[y0，y1]×[z0，z1]的轴对齐框的符号距离函数可以通过首先检查点在内部还是外部，然后使用最接近的距离来计算,参见图4.1.圆柱体和圆锥体也相当简单.



我们将在下面介绍如何计算到三角形网格的有符号距离，但是它要复杂得多，并且如果没有优化的加速结构，可能会很慢。 显然，如果符号距离函数的评估比直接从网格计算内部/外部更昂贵，那么将内部/外部几何查询改写为仅评估有符号的距离函数并不会帮自己一个忙。 我们还没有真正更改底层的几何表示：我们只是将其隐藏了。

这就是水平集法起作用的地方.与其从几何信息中解析地计算出符号距离,不如将其与其他流体变量一样直接存储在网格上.然后,当我们需要评估时,从周围的网格点内插一个近似值.结果通常是近似值,但也足够好:无论如何,所有流体模拟都处理近似结果,因此也可以接受几何近似.这是人们通常用“水平集”一词来理解的核心:距离函数可以在网格上采样.

一旦使用网格值,就可以通过插值快速而轻松地评估.使用有限差分,对梯度进行近似也很容易.例如,可以在任意两个网格点之间沿x轴的中途获得的精确有限差分估计：

同样，我们可以在网格值之间的其他中点获得y导数和z导数的估计值。然后，我们可以在这些值之间进行插值，以在网格中的任何点获得近似的梯度向量。通常，这比直接对φ的插值求导更可取，因为我们通常使用的插值（分段三线性或分段三三次）在网格单元之间的导数中具有跳跃间断.

4.3 计算符号距离

如果我们没有给定几何图形的简单解析公式，但是想要生成它的水平集，则需要一种算法来计算网格上的有符号距离.一个特别有帮助的脚注是算法不一定是精确的:插值时,我们已经引入了误差,因此可以容忍网格值本身中的小误差,尤其是远离曲面本身的误差.

有两种主要的计算水平集的方法：从几何（找到最近的点并测量到它们的距离）或从PDE（求解Eikonal方程）.两者都有其用途：几何方法通常更准确，更容易理解，但是PDE方法适用于几何图形不明确的情况.

4.3.1 点之间的距离

我们将从一种特殊情况开始，尽管这是一种常见操作：通过几何方法计算到一组有限点的距离。 请注意，没有“内部”，因此该距离是否带符号是没有意义的。 该算法在图4.2中给出，其中一个关键要素未指定：我们在网格上循环传播距离信息的顺序。 它基于Tsai文章[Tsa02]中的算法。 有关其他许多算法的综述，请参阅Jones等人的论文[JBS06]。

在第一阶段，我们直接在紧邻输入点的网格单元中计算精确的距离和最接近的点信息，而无需任何花哨的几何数据结构。 第二阶段可以再次通过网格将其有效地从邻居传播到邻居，而无需额外的数据结构。 但是，这并不精确：最接近给定网格单元的点可能与最接近其任何邻居的点不同。 话虽如此，到真正最接近点的距离永远不会与通过这种方法计算得出的到最接近点的距离有很大的不同：在实践中，这非常有效。